Bryła sztywna

- Bryłą sztywną (ciałem doskonale sztywnym) nazywamy ciało, w którym odległości między poszczególnymi częściami nie ulegają zmianie pod wpływem działających na to ciało sił.
- Ponieważ odległości między punktami bryły są stałe w czasie, położenie (x_P, y_P, z_P) dowolnego punktu P bryły jest jednoznacznie wyznaczone przez podanie położeń trzech punktów A, B oraz C bryły nie leżących na jednej prostej. W szczególności można pokazać, że znając odległości d_{PA}, d_{PB} i d_{PC}, gdzie
$$d_{PA} = \sqrt{(x_P - x_A)^2 + (y_P - y_A)^2 + (z_P - z_A)^2}$$
itd., możemy wyrazić współrzędne punktu P przez współrzędne punktów A, B i C.
- Spośród dziewięciu współrzędnych punktów A, B i C tylko sześć to niezależne funkcje czasu, gdyż odległości d_{AB}, d_{BC} i d_{CA} są niezmienne. Położenie bryły sztywnej można więc opisać przez podanie sześciu niezależnych funkcji czasu (tj. bryła sztywna ma sześć **stopni swobody**).
- Z bryłą sztywną możemy związać układ współrzędnych, względem którego bryła jest nieruchoma, np. wybierając punkt A jako początek układ, oś $\widetilde{x}$ jako oś o kierunku i zwrocie pokazującym od A do B, oś $\widetilde{y}$ jako prostopadłą do $\widetilde{x}$ i leżącą w płaszczyźnie trójkąta ABC (tak, że $\widetilde{y}_C > 0$), oraz oś $\widetilde{z}$ której wersor jest dany przez $\vec{\widetilde{k}} = \vec{\widetilde{i}} \times \vec{\widetilde{j}}$. W tym układzie współrzędnych każdy punkt bryły ma współrzędne stałe w czasie.
- Często naturalnie jest wybrać początek układu współrzędnych $\widetilde{xyz}$ (tj. punkt A) jako środek masy bryły. W tym przypadku naturalnymi niezależnymi funkcjami czasu są trzy współrzędne środka masy oraz trzy kąty określające orientację osi układu $\widetilde{xyz}$ względem układu nieruchomego (lub, zamiast kątów, dowolną inną wygodną parametryzację macierzy obrotu).

Bryła sztywna: dynamika

Bryła sztywna: dynamika

- W celu wyznaczenia zależności od czasu sześciu niezależnych funkcji potrzebujemy sześciu niezależnych równań dynamicznych. Trzy pierwsze równania dostajemy z równania ruchu środka masy
$$m\vec{r}_{\text{ŚM}}''(t) = \sum_i \vec{F}_i^{zew}(t) \tag{26}$$
gdzie m jest masą bryły, natomiast $\sum_i \vec{F}_i^{zew}$ jest sumą wszystkich sił zewnętrznych działających na bryłę.

Bryła sztywna: dynamika

- W celu wyznaczenia zależności od czasu sześciu niezależnych funkcji potrzebujemy sześciu niezależnych równań dynamicznych. Trzy pierwsze równania dostajemy z równania ruchu środka masy
$$m\vec{r}\,''_{\text{ŚM}}(t) = \sum_i \vec{F}_i^{zew}(t) \tag{26}$$
gdzie m jest masą bryły, natomiast $\sum_i \vec{F}_i^{zew}$ jest sumą wszystkich sił zewnętrznych działających na bryłę.
- W celu otrzymania brakujących trzech równań założymy, że bryłę sztywną można traktować jako graniczny przypadek układu punktów materialnych oddziałujących wzajemnie siłami leżącymi wzdłuż łączącej je prostej. Jeśli bryłę tworzy kilka niewielkich masywnych ciał ("punktów") połączonych sztywnymi nieważkimi prętami, słuszność tego założenia nie budzi wątpliwości. W ogólnym przypadku, założenie to jest uzasadnione *a posteriori*, poprzez zgodność z doświadczeniem uzyskanych na jego bazie równań ruchu.

Bryła sztywna: dynamika

- W celu wyznaczenia zależności od czasu sześciu niezależnych funkcji potrzebujemy sześciu niezależnych równań dynamicznych. Trzy pierwsze równania dostajemy z równania ruchu środka masy
$$m\vec{r}_{\text{ŚM}}''(t) = \sum_i \vec{F}_i^{zew}(t) \tag{26}$$
gdzie m jest masą bryły, natomiast $\sum_i \vec{F}_i^{zew}$ jest sumą wszystkich sił zewnętrznych działających na bryłę.
- W celu otrzymania brakujących trzech równań założymy, że bryłę sztywną można traktować jako graniczny przypadek układu punktów materialnych oddziałujących wzajemnie siłami leżącymi wzdłuż łączącej je prostej. Jeśli bryłę tworzy kilka niewielkich masywnych ciał ("punktów") połączonych sztywnymi nieważkimi prętami, słuszność tego założenia nie budzi wątpliwości. W ogólnym przypadku, założenie to jest uzasadnione *a posteriori*, poprzez zgodność z doświadczeniem uzyskanych na jego bazie równań ruchu.
- Przy powyższym założeniu o postaci sił wewnętrznych, brakujące trzy równania dostaniemy ze wzoru (27) na pochodną momentu pędu (względem punktu $\mathcal{O}$, który jest albo punktem nieruchomym, albo środkiem masy bryły)
$$\vec{L}_{\mathcal{O}}'(t) = \sum_i \vec{D}_{\mathcal{O}i}^{zew}(t) \tag{27}$$
gdzie po prawej stronie występuje sumaryczny moment sił zewnętrznych działających na bryłę.

Bryła sztywna: ruch obrotowy wokół osi

Bryła sztywna: ruch obrotowy wokół osi

- Omówimy szczegółowo ważny w technicznych zastosowaniach ruch obrotowy bryły wokół osi, która jest albo **ustalona**, albo jest przemieszczającą się **równolegle** wraz z bryłą osią przechodzącą przez środek masy.

Bryła sztywna: ruch obrotowy wokół osi

- Omówimy szczegółowo ważny w technicznych zastosowaniach ruch obrotowy bryły wokół osi, która jest albo **ustalona**, albo jest przemieszczającą się **równolegle** wraz z bryłą osią przechodzącą przez środek masy.
- Ogólny przypadek różni się od niego tylko o czysto techniczne komplikacje. W szczególności każdy ruch bryły sztywnej jest złożeniem ruchu postępowego środka masy, oraz ruchu obrotowego wokół chwilowej (tj. zmiennej w czasie) osi obrotu.

Bryła sztywna: ruch obrotowy wokół osi

- Omówimy szczegółowo ważny w technicznych zastosowaniach ruch obrotowy bryły wokół osi, która jest albo **ustalona**, albo jest przemieszczającą się **równolegle** wraz z bryłą osią przechodzącą przez środek masy.
- Ogólny przypadek różni się od niego tylko o czysto techniczne komplikacje. W szczególności każdy ruch bryły sztywnej jest złożeniem ruchu postępowego środka masy, oraz ruchu obrotowego wokół chwilowej (tj. zmiennej w czasie) osi obrotu.
- W ruchu bryły wokół ustalonej osi możemy przyjąć, że dwa (powiedzmy A i B) z trzech wybranych punktów bryły, o których mowa na str. 100, leżą na osi obrotu (tj. spoczywają). W efekcie położenie bryły jest jednoznacznie wyznaczone przez położenie trzeciego punktu C, które (z uwagi na ustalone odległości od A i B)) ma jedną niezależną składową. Tj. w ruchu wokół ustalonej osi bryła ma tylko jeden stopień swobody. Jako naturalną zmienną dynamiczną możemy wybrać przesunięcie kątowe $\phi(t)$ punktu C, odmierzane od umownie wybranej ustalonej chwili początkowej t_0, w której $\phi(t_0) = 0$.

Bryła sztywna: ruch obrotowy wokół osi

- Omówimy szczegółowo ważny w technicznych zastosowaniach ruch obrotowy bryły wokół osi, która jest albo **ustalona**, albo jest przemieszczającą się **równolegle** wraz z bryłą osią przechodzącą przez środek masy.
- Ogólny przypadek różni się od niego tylko o czysto techniczne komplikacje. W szczególności każdy ruch bryły sztywnej jest złożeniem ruchu postępowego środka masy, oraz ruchu obrotowego wokół chwilowej (tj. zmiennej w czasie) osi obrotu.
- W ruchu bryły wokół ustalonej osi możemy przyjąć, że dwa (powiedzmy A i B) z trzech wybranych punktów bryły, o których mowa na str. 100, leżą na osi obrotu (tj. spoczywają). W efekcie położenie bryły jest jednoznacznie wyznaczone przez położenie trzeciego punktu C, które (z uwagi na ustalone odległości od A i B)) ma jedną niezależną składową. Tj. w ruchu wokół ustalonej osi bryła ma tylko jeden stopień swobody. Jako naturalną zmienną dynamiczną możemy wybrać przesunięcie kątowe $\phi(t)$ punktu C, odmierzane od umownie wybranej ustalonej chwili początkowej t_0, w której $\phi(t_0) = 0$.
- Zawsze możemy dobrać spoczywający układ współrzędnych tak, aby ustalona oś obrotu pokrywała się z osią z. Wówczas punkty bryły leżące poza osią obrotu poruszają się po okręgach w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny xy, doznając takich samych przesunięc kątowych $\phi(t)$ jak punkt C.

Bryła sztywna: ruch obrotowy wokół osi

- Omówimy szczegółowo ważny w technicznych zastosowaniach ruch obrotowy bryły wokół osi, która jest albo **ustalona**, albo jest przemieszczającą się **równolegle** wraz z bryłą osią przechodzącą przez środek masy.
- Ogólny przypadek różni się od niego tylko o czysto techniczne komplikacje. W szczególności każdy ruch bryły sztywnej jest złożeniem ruchu postępowego środka masy, oraz ruchu obrotowego wokół chwilowej (tj. zmiennej w czasie) osi obrotu.
- W ruchu bryły wokół ustalonej osi możemy przyjąć, że dwa (powiedzmy A i B) z trzech wybranych punktów bryły, o których mowa na str. 100, leżą na osi obrotu (tj. spoczywają). W efekcie położenie bryły jest jednoznacznie wyznaczone przez położenie trzeciego punktu C, które (z uwagi na ustalone odległości od A i B)) ma jedną niezależną składową. Tj. w ruchu wokół ustalonej osi bryła ma tylko jeden stopień swobody. Jako naturalną zmienną dynamiczną możemy wybrać przesunięcie kątowe $\phi(t)$ punktu C, odmierzane od umownie wybranej ustalonej chwili początkowej t_0, w której $\phi(t_0) = 0$.
- Zawsze możemy dobrać spoczywający układ współrzędnych tak, aby ustalona oś obrotu pokrywała się z osią z. Wówczas punkty bryły leżące poza osią obrotu poruszają się po okręgach w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny xy, doznając takich samych przesunięc kątowych $\phi(t)$ jak punkt C.
- Kinematykę ruchu po okręgu omawialiśmy na str. 84. W obecnym przypadku odległość fragmentu bryły od osi obrotu (stałą podczas obrotu) oznaczamy zwyczajowo jako ρ.

Bryła sztywna: ruch obrotowy wokół osi

- Omówimy szczegółowo ważny w technicznych zastosowaniach ruch obrotowy bryły wokół osi, która jest albo **ustalona**, albo jest przemieszczającą się **równolegle** wraz z bryłą osią przechodzącą przez środek masy.
- Ogólny przypadek różni się od niego tylko o czysto techniczne komplikacje. W szczególności każdy ruch bryły sztywnej jest złożeniem ruchu postępowego środka masy, oraz ruchu obrotowego wokół chwilowej (tj. zmiennej w czasie) osi obrotu.
- W ruchu bryły wokół ustalonej osi możemy przyjąć, że dwa (powiedzmy A i B) z trzech wybranych punktów bryły, o których mowa na str. 100, leżą na osi obrotu (tj. spoczywają). W efekcie położenie bryły jest jednoznacznie wyznaczone przez położenie trzeciego punktu C, które (z uwagi na ustalone odległości od A i B)) ma jedną niezależną składową. Tj. w ruchu wokół ustalonej osi bryła ma tylko jeden stopień swobody. Jako naturalną zmienną dynamiczną możemy wybrać przesunięcie kątowe $\phi(t)$ punktu C, odmierzane od umownie wybranej ustalonej chwili początkowej t_0, w której $\phi(t_0) = 0$.
- Zawsze możemy dobrać spoczywający układ współrzędnych tak, aby ustalona oś obrotu pokrywała się z osią z. Wówczas punkty bryły leżące poza osią obrotu poruszają się po okręgach w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny xy, doznając takich samych przesunięc kątowych $\phi(t)$ jak punkt C.
- Kinematykę ruchu po okręgu omawialiśmy na str. 84. W obecnym przypadku odległość fragmentu bryły od osi obrotu (stałą podczas obrotu) oznaczamy zwyczajowo jako ρ.
- W celu uproszczenia notacji, będziemy poniżej traktowali bryłę sztywną jako dyskretny zbiór punktów ("sześcianików"), numerowanych indeksem i (lub j, itd.). Do notacji ciągłej (tj. granicy nieskończenie małych "sześcianików") przejdziemy dopiero po uzyskaniu wymaganych wzorów.

Moment pędu bryły w ruchu wokół osi I

Moment pędu bryły w ruchu wokół osi I

- Współrzędne i-tego puntu bryły zależą od czasu w następujący sposób

$$x_i(t) = \rho_i\, cos(\psi_i + \phi(t))\,, \qquad y_i(t) = \rho_i\, sin(\psi_i + \phi(t))\,, \qquad z_i(t) = z_i(t_0) = \mathscr{Z}_i$$

gdzie ρ_i jest stałą w czasie odległością punktu od osi obrotu, natomiast stały kąt ψ_i wyznacza początkowe położenie punktu bryły w płaszczyźnie xy

$$\mathscr{X}_i = x_i(t_0) = \rho_i\, \cos(\psi_i)\,, \qquad \mathscr{Y}_i = y_i(t_0) = \rho_i\, \sin(\psi_i)\,,$$

Moment pędu bryły w ruchu wokół osi I

- Współrzędne i-tego puntu bryły zależą od czasu w następujący sposób

$$x_i(t) = \rho_i\, cos(\psi_i + \phi(t))\,, \qquad y_i(t) = \rho_i\, sin(\psi_i + \phi(t))\,, \qquad z_i(t) = z_i(t_0) = \mathscr{Z}_i$$

gdzie ρ_i jest stałą w czasie odległością punktu od osi obrotu, natomiast stały kąt ψ_i wyznacza początkowe położenie punktu bryły w płaszczyźnie xy

$$\mathscr{X}_i = x_i(t_0) = \rho_i\, \cos(\psi_i)\,, \qquad \mathscr{Y}_i = y_i(t_0) = \rho_i\, \sin(\psi_i)\,,$$

- Różniczkując po czasie dostajemy składowe prędkości i-tego puntku bryły

$$v_{xi}(t) = -\phi'(t)\,\rho_i\, \sin(\psi_i + \phi(t))\,, \qquad v_{yi}(t) = \phi'(t)\,\rho_i\, \cos(\psi_i + \phi(t))\,, \qquad v_{zi}(t) = 0 \tag{28}$$

Moment pędu bryły w ruchu wokół osi I

- Współrzędne i-tego puntu bryły zależą od czasu w następujący sposób

$$x_i(t) = \rho_i\, cos(\psi_i + \phi(t))\,, \qquad y_i(t) = \rho_i\, sin(\psi_i + \phi(t))\,, \qquad z_i(t) = z_i(t_0) = \mathscr{Z}_i$$

gdzie ρ_i jest stałą w czasie odległością punktu od osi obrotu, natomiast stały kąt ψ_i wyznacza początkowe położenie punktu bryły w płaszczyźnie xy

$$\mathscr{X}_i = x_i(t_0) = \rho_i\, \cos(\psi_i)\,, \qquad \mathscr{Y}_i = y_i(t_0) = \rho_i\, \sin(\psi_i)\,,$$

- Różniczkując po czasie dostajemy składowe prędkości i-tego puntku bryły

$$v_{xi}(t) = -\phi'(t)\,\rho_i\, \sin(\psi_i + \phi(t))\,, \qquad v_{yi}(t) = \phi'(t)\,\rho_i\, \cos(\psi_i + \phi(t))\,, \qquad v_{zi}(t) = 0 \tag{28}$$

- Składowe momentu pędu punktu i względem początku układu współrzędnych to

$$L_{xi}(t) = m_i(y_i(t)v_{zi}(t) - z_i(t)v_{yi}(t))\,, \qquad L_{yi}(t) = m_i(z_i(t)v_{xi}(t) - x_i(t)v_{zi}(t))\,,$$
$$L_{zi}(t) = m_i(x_i(t)v_{yi}(t) - y_i(t)v_{xi}(t))$$

Moment pędu bryły w ruchu wokół osi I

- Współrzędne i-tego puntu bryły zależą od czasu w następujący sposób

$$x_i(t) = \rho_i\, cos(\psi_i + \phi(t))\,, \qquad y_i(t) = \rho_i\, sin(\psi_i + \phi(t))\,, \qquad z_i(t) = z_i(t_0) = \mathscr{Z}_i$$

gdzie ρ_i jest stałą w czasie odległością punktu od osi obrotu, natomiast stały kąt ψ_i wyznacza początkowe położenie punktu bryły w płaszczyźnie xy

$$\mathscr{X}_i = x_i(t_0) = \rho_i\ \cos(\psi_i)\,, \qquad \mathscr{Y}_i = y_i(t_0) = \rho_i\ \sin(\psi_i)\,,$$

- Różniczkując po czasie dostajemy składowe prędkości i-tego puntku bryły

$$v_{xi}(t) = -\phi'(t)\,\rho_i\ \sin(\psi_i + \phi(t))\,, \qquad v_{yi}(t) = \phi'(t)\,\rho_i\ \cos(\psi_i + \phi(t))\,, \qquad v_{zi}(t) = 0 \tag{28}$$

- Składowe momentu pędu punktu i względem początku układu współrzędnych to

$$L_{xi}(t) = m_i(y_i(t)v_{zi}(t) - z_i(t)v_{yi}(t))\,, \qquad L_{yi}(t) = m_i(z_i(t)v_{xi}(t) - x_i(t)v_{zi}(t))\,,$$
$$L_{zi}(t) = m_i(x_i(t)v_{yi}(t) - y_i(t)v_{xi}(t))$$

co daje

$$L_{xi}(t) = -\phi'(t)\cos(\psi_i + \phi(t))\, m_i\, \mathscr{Z}_i\, \rho_i\,, \qquad L_{yi}(t) = -\phi'(t)\sin(\psi_i + \phi(t))\, m_i\, \mathscr{Z}_i\, \rho_i\,,$$
$$L_{zi}(t) = \phi'(t)\, m_i\, \rho_i^2\,, \tag{29}$$

Moment pędu bryły w ruchu wokół osi II

Moment pędu bryły w ruchu wokół osi II

- Moment pędu całej bryły dostajemy sumując momenty pędu poszczególnych jej "punktów" (dodatkowo korzystamy ze szkolnych wzorów na sinus i cosinus sumy kątów)

$$L_z(t) = \mathcal{I}_{\mathscr{Z}}\, \phi'(t)\,, \tag{30}$$

$$L_x(t) = -\phi'(t)\cos(\phi(t))\,\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{X}} + \phi'(t)\sin(\phi(t))\,\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{Y}} \tag{31}$$

$$L_y(t) = -\phi'(t)\sin(\phi(t))\,\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{X}} - \phi'(t)\cos(\phi(t))\,\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{Y}} \tag{32}$$

Moment pędu bryły w ruchu wokół osi II

- Moment pędu całej bryły dostajemy sumując momenty pędu poszczególnych jej "punktów" (dodatkowo korzystamy ze szkolnych wzorów na sinus i cosinus sumy kątów)

$$L_z(t) = \mathcal{I}_{\mathscr{Z}}\,\phi'(t)\,, \tag{30}$$

$$L_x(t) = -\phi'(t)\cos(\phi(t))\,\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{X}} + \phi'(t)\sin(\phi(t))\,\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{Y}} \tag{31}$$

$$L_y(t) = -\phi'(t)\sin(\phi(t))\,\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{X}} - \phi'(t)\cos(\phi(t))\,\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{Y}} \tag{32}$$

gdzie współczynniki $\mathcal{I}_{\mathscr{Z}}$, $\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{X}}$ i $\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{Y}}$ nie zależą już od czasu, a tylko od początkowego ustawienia bryły w nieruchomym układzie współrzędnych

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\mathscr{Z}} &= \sum_i m_i\,\rho_i^2 = \sum_i m_i\,(\mathscr{X}_i^2 + \mathscr{Y}_i^2)\,,\\
\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{X}} &= \sum_i m_i\,\mathscr{Z}_i\,\rho_i\,\cos(\psi_i) = \sum_i m_i\,\mathscr{Z}_i\,\mathscr{X}_i\,,\\
\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{Y}} &= \sum_i m_i\,\mathscr{Z}_i\,\rho_i\,\sin(\psi_i) = \sum_i m_i\,\mathscr{Z}_i\,\mathscr{Y}_i\,,
\end{aligned}$$

Moment pędu bryły w ruchu wokół osi II

- Moment pędu całej bryły dostajemy sumując momenty pędu poszczególnych jej "punktów" (dodatkowo korzystamy ze szkolnych wzorów na sinus i cosinus sumy kątów)

$$L_z(t) = \mathcal{I}_{\mathscr{Z}}\, \phi'(t)\,, \tag{30}$$
$$L_x(t) = -\phi'(t)\cos(\phi(t))\, \mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{X}} + \phi'(t)\sin(\phi(t))\, \mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{Y}} \tag{31}$$
$$L_y(t) = -\phi'(t)\sin(\phi(t))\, \mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{X}} - \phi'(t)\cos(\phi(t))\, \mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{Y}} \tag{32}$$

  gdzie współczynniki $\mathcal{I}_{\mathscr{Z}}$, $\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{X}}$ i $\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{Y}}$ nie zależą już od czasu, a tylko od początkowego ustawienia bryły w nieruchomym układzie współrzędnych

$$\mathcal{I}_{\mathscr{Z}} = \sum_i m_i\, \rho_i^2 = \sum_i m_i\, (\mathscr{X}_i^2 + \mathscr{Y}_i^2)\,,$$
$$\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{X}} = \sum_i m_i\, \mathscr{Z}_i\, \rho_i\, \cos(\psi_i) = \sum_i m_i\, \mathscr{Z}_i\, \mathscr{X}_i\,,$$
$$\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{Y}} = \sum_i m_i\, \mathscr{Z}_i\, \rho_i\, \sin(\psi_i) = \sum_i m_i\, \mathscr{Z}_i\, \mathscr{Y}_i\,,$$

- Łatwo przekonać się, że jeśli bryła porusza się ruchem postępowym i dodatkowo wykonuje ruch obrotowy wokół osi, która przechodzi przez środek masy i pozostaje cały czas równoległa do osi z, to wzory (30)-(32) dają moment pędu bryły względem środka masy, **jeśli** we wzorach na $\mathcal{I}_{\mathscr{Z}}$, $\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{X}}$ i $\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{Y}}$ zastąpimy współrzędne początkowe $\mathscr{X}_i$, $\mathscr{Y}_i$, $\mathscr{Z}_i$ przez różnice $\mathscr{X}_i - x_{\text{ŚM}}(t_0)$, itd.

Momenty zboczenia i bezwładności

- Z dynamicznego równania ruchu bryły widzimy, że gdy na bryłę nie działają żadne siły zewnętrzne, jej moment pędu pozostaje stały.
- Jeśli składowa L_z jest stała, bryła porusza się ze stałą prędkością kątową $\phi'(t)$. Wzory na składowe L_x i L_y pokazują jednak, że w ogólności nie są one stałe gdy $\phi'(t) \neq 0$. Innymi słowy, współczynniki $\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{X}}$ i $\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{Y}}$ są miarą niechęci bryły do obracania się wokół ustalonej osi więc nazywamy je momentami dewiacji (zboczenia). Z kolei $\mathcal{I}_{\mathscr{Z}}$ jest miarą niechęci bryły do zmian wartości prędkości kątowej, więc nazywamy go momentem bezwładności.
- Jeśli oś z jest geometryczną osią symetrii bryły jednorodnej, to wraz z każdym punktem i o położeniu początkowym $(\mathscr{X}_i, \mathscr{Y}_i, \mathscr{Z}_i)$ oraz masie m_i, bryła zawiera punkt j odbity względem osi, tj. $(\mathscr{X}_j, \mathscr{Y}_j, \mathscr{Z}_j) = (-\mathscr{X}_i, -\mathscr{Y}_i, \mathscr{Z}_i)$, i mający taką samą masę $m_j = m_i$. Oznacza to, że momenty dewiacji $\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{X}}$ i $\mathscr{D}_{\mathscr{Z}\mathscr{Y}}$ znikają.
- Oś obrotu względem której znikają momenty dewiacji nazywamy główną osią bezwładności.
- Można pokazać, że dla dowolnej bryły przez każdy punkt przestrzeni przechodzą trzy wzajemnie prostopadłe osie główne
- Jeśli oś z jest główną osią bezwładności, to moment pędu bryły przy **dowolnym** obrocie wokół (ustalonej) osi z ma tylko składową L_z.
- Obrót bryły ze stałą prędkością kątową wokół osi głównej nie wymaga niezerowego momentu sił zewnętrznych.
- Jeśli oś obrotu nie przechodzi przez środek masy, to środek masy porusza się po okręgu, co oznacza, że na bryłę musi działać niezerowa siła wypadkowa.

Naturalny ruch bryły

Naturalny ruch bryły

- Bryła na którą nie działają żadne siły zewnętrzne może obracać się ze stałą prędkością kątową wokół jednej z głównych osi bezwładności przechodzących przez jej środek masy. W ogólności ruchowi obrotowemu towarzyszy ruch postępowy środka masy ze stałym wektorem prędkości.

Naturalny ruch bryły

- Bryła na którą nie działają żadne siły zewnętrzne może obracać się ze stałą prędkością kątową wokół jednej z głównych osi bezwładności przechodzących przez jej środek masy. W ogólności ruchowi obrotowemu towarzyszy ruch postępowy środka masy ze stałym wektorem prędkości.
- Główną oś bezwładności przechodzącą przez środek masy nazywamy główną centralną osią bezwładności.

Moment siły grawitacyjnej

- W jednorodnym polu grawitacyjnym, sumaryczny moment sił grawitacyjnych działających na bryłę wynosi

$$\begin{aligned}\vec{D}_{\mathcal{O}}^{grav}(t) &= \sum_i \left[\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{\mathcal{O}}(t)\right] \times (m_i \vec{g}) = \sum_i \left[m_i \vec{r}_i(t) - m_i \vec{r}_{\mathcal{O}}(t)\right] \times \vec{g} \\ &= \left[\vec{r}_{\text{ŚM}}(t) - \vec{r}_{\mathcal{O}}(t)\right] \times (m\vec{g})\end{aligned}$$

- Widzimy, że sumaryczny moment ziemskiej siły grawitacyjnej możemy dostać przyjmując, że siła grawitacji jest przyłożona do środka masy ciała.

Wektor prędkości kątowej

Wektor prędkości kątowej

- W najogólniejszym ruchu bryły sztywnej, prędkość dowolnego punktu bryły ma postać

$$\vec{v}_i(t) = \vec{r}_{\text{ŚM}}{}'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{\text{ŚM}}(t)) \tag{33}$$

gdzie $\vec{\omega}(t)$ jest wektorem prędkości kątowej opisującej obrót względem chwilowej (zmiennej w czasie) osi obrotu przechodzącej przez środek masy.

Wektor prędkości kątowej

- W najogólniejszym ruchu bryły sztywnej, prędkość dowolnego punktu bryły ma postać

$$\vec{v}_i(t) = \vec{r}_{\text{ŚM}}{}'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{\text{ŚM}}(t)) \tag{33}$$

  gdzie $\vec{\omega}(t)$ jest wektorem prędkości kątowej opisującej obrót względem chwilowej (zmiennej w czasie) osi obrotu przechodzącej przez środek masy.
- Wektor predkości $\vec{v}_i(t)$ dowolnego punktu bryły wirującej wokół ustalonej osi z (28) można zapisać jako

$$\vec{v}_i(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_i(t) \tag{34}$$

  gdzie $\vec{r}_i(t)$ jest wektorem położenia tego punktu, natomiast $\vec{\omega}(t) = \phi'(t)\vec{k}$ jest wektorem prędkości kątowej.

Wektor prędkości kątowej

- W najogólniejszym ruchu bryły sztywnej, prędkość dowolnego punktu bryły ma postać
$$\vec{v}_i(t) = \vec{r}_{\text{ŚM}}{}'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{\text{ŚM}}(t)) \tag{33}$$
gdzie $\vec{\omega}(t)$ jest wektorem prędkości kątowej opisującej obrót względem chwilowej (zmiennej w czasie) osi obrotu przechodzącej przez środek masy.
- Wektor predkości $\vec{v}_i(t)$ dowolnego punktu bryły wirującej wokół ustalonej osi z (28) można zapisać jako
$$\vec{v}_i(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_i(t) \tag{34}$$
gdzie $\vec{r}_i(t)$ jest wektorem położenia tego punktu, natomiast $\vec{\omega}(t) = \phi'(t)\vec{k}$ jest wektorem prędkości kątowej.
- Kierunek wektora prędkości kątowej jest wyznaczony przez (chwilową) oś obrotu, natomiast zwrot wynika z reguły prawej ręki: jeśli palce oplatają oś obrotu pokazując stronę, w którą obraca się ciało, to kciuk wyznacza zwrot wektora prędkości kątowej.

Wektor prędkości kątowej

- W najogólniejszym ruchu bryły sztywnej, prędkość dowolnego punktu bryły ma postać
$$\vec{v}_i(t) = \vec{r}_{\text{ŚM}}{}'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{\text{ŚM}}(t)) \tag{33}$$
gdzie $\vec{\omega}(t)$ jest wektorem prędkości kątowej opisującej obrót względem chwilowej (zmiennej w czasie) osi obrotu przechodzącej przez środek masy.
- Wektor predkości $\vec{v}_i(t)$ dowolnego punktu bryły wirującej wokół ustalonej osi z (28) można zapisać jako
$$\vec{v}_i(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_i(t) \tag{34}$$
gdzie $\vec{r}_i(t)$ jest wektorem położenia tego punktu, natomiast $\vec{\omega}(t) = \phi'(t)\vec{k}$ jest wektorem prędkości kątowej.
- Kierunek wektora prędkości kątowej jest wyznaczony przez (chwilową) oś obrotu, natomiast zwrot wynika z reguły prawej ręki: jeśli palce oplatają oś obrotu pokazując stronę, w którą obraca się ciało, to kciuk wyznacza zwrot wektora prędkości kątowej.
- Składową momentu pędu wzdłuż osi z możemy zapisać jako $L_z(t) = \mathcal{I}_{\mathscr{Z}}\, \omega_z(t)$

Wektor prędkości kątowej

- W najogólniejszym ruchu bryły sztywnej, prędkość dowolnego punktu bryły ma postać
$$\vec{v}_i(t) = \vec{r}_{ŚM}{}'(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_{ŚM}(t)) \tag{33}$$
gdzie $\vec{\omega}(t)$ jest wektorem prędkości kątowej opisującej obrót względem chwilowej (zmiennej w czasie) osi obrotu przechodzącej przez środek masy.
- Wektor predkości $\vec{v}_i(t)$ dowolnego punktu bryły wirującej wokół ustalonej osi z (28) można zapisać jako
$$\vec{v}_i(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}_i(t) \tag{34}$$
gdzie $\vec{r}_i(t)$ jest wektorem położenia tego punktu, natomiast $\vec{\omega}(t) = \phi'(t)\vec{k}$ jest wektorem prędkości kątowej.
- Kierunek wektora prędkości kątowej jest wyznaczony przez (chwilową) oś obrotu, natomiast zwrot wynika z reguły prawej ręki: jeśli palce oplatają oś obrotu pokazując stronę, w którą obraca się ciało, to kciuk wyznacza zwrot wektora prędkości kątowej.
- Składową momentu pędu wzdłuż osi z możemy zapisać jako $L_z(t) = \mathcal{I}_{\mathscr{Z}}\, \omega_z(t)$
- Należy pamiętać, że kierunki wektorów $\vec{\omega}(t)$ i $\vec{L}(t)$ są **różne** jeśli oś obrotu nie jest osią główną.

Dynamika bryły sztywnej: podsumowanie

Dynamika bryły sztywnej: podsumowanie

- Ruch środka masy bryły dostajemy rozwiązując równanie

$$m\vec{r}_{\text{ŚM}}''(t) = \sum_i \vec{F}_i^{zew}(t) \tag{35}$$

gdzie m jest masą bryły, natomiast $\sum_i \vec{F}_i^{zew}$ jest sumą wszystkich sił zewnętrznych działających na bryłę.

Dynamika bryły sztywnej: podsumowanie

- Ruch środka masy bryły dostajemy rozwiązując równanie

$$m\vec{r}\,''_{\text{ŚM}}(t) = \sum_i \vec{F}_i^{zew}(t) \tag{35}$$

gdzie m jest masą bryły, natomiast $\sum_i \vec{F}_i^{zew}$ jest sumą wszystkich sił zewnętrznych działających na bryłę.

- Jeśli bryła wykonuje ruch obrotowy wokół osi nieruchomej lub przemieszczającej się równolegle osi przechodzącej przez środek masy, to prędkość kątową bryły dostajemy rozwiązując równanie

$$\vec{L}'(t) = \sum_i \vec{D}_i^{zew}(t) \tag{36}$$

gdzie $\sum_i \vec{D}_i^{zew}(t)$ jest sumarycznym momentem sił zewnętrznych względem, odpowiednio, punktu nieruchomego leżącego na osi lub względem środka masy, natomiast $\vec{L}(t)$ – momentem pędu względem tego samego punktu.

Dynamika bryły sztywnej: podsumowanie

- Ruch środka masy bryły dostajemy rozwiązując równanie

$$m\vec{r}_{\text{ŚM}}''(t) = \sum_i \vec{F}_i^{zew}(t) \tag{35}$$

gdzie m jest masą bryły, natomiast $\sum_i \vec{F}_i^{zew}$ jest sumą wszystkich sił zewnętrznych działających na bryłę.

- Jeśli bryła wykonuje ruch obrotowy wokół osi nieruchomej lub przemieszczającej się równolegle osi przechodzącej przez środek masy, to prędkość kątową bryły dostajemy rozwiązując równanie

$$\vec{L}'(t) = \sum_i \vec{D}_i^{zew}(t) \tag{36}$$

gdzie $\sum_i \vec{D}_i^{zew}(t)$ jest sumarycznym momentem sił zewnętrznych względem, odpowiednio, punktu nieruchomego leżącego na osi lub względem środka masy, natomiast $\vec{L}(t)$ – momentem pędu względem tego samego punktu.

- Składowa prędkości kątowej wzdłuż osi obrotu wiąże się z momentem pędu przez $\mathcal{I}\omega_z(t) = L_z(t)$, gdzie $\mathcal{I}$ jest momentem bezwładności względem osi obrotu (założyliśmy, że oś obrotu jest równoległa do osi z).

Dynamika bryły sztywnej: podsumowanie

- Ruch środka masy bryły dostajemy rozwiązując równanie

$$m\vec{r}\,''_{\text{ŚM}}(t) = \sum_i \vec{F}_i^{zew}(t) \tag{35}$$

gdzie m jest masą bryły, natomiast $\sum_i \vec{F}_i^{zew}$ jest sumą wszystkich sił zewnętrznych działających na bryłę.

- Jeśli bryła wykonuje ruch obrotowy wokół osi nieruchomej lub przemieszczającej się równolegle osi przechodzącej przez środek masy, to prędkość kątową bryły dostajemy rozwiązując równanie

$$\vec{L}'(t) = \sum_i \vec{D}_i^{zew}(t) \tag{36}$$

gdzie $\sum_i \vec{D}_i^{zew}(t)$ jest sumarycznym momentem sił zewnętrznych względem, odpowiednio, punktu nieruchomego leżącego na osi lub względem środka masy, natomiast $\vec{L}(t)$ – momentem pędu względem tego samego punktu.

- Składowa prędkości kątowej wzdłuż osi obrotu wiąże się z momentem pędu przez $\mathcal{I}\omega_z(t) = L_z(t)$, gdzie $\mathcal{I}$ jest momentem bezwładności względem osi obrotu (założyliśmy, że oś obrotu jest równoległa do osi z).
- Należy pamiętać, że w ogólnym przypadku, składowe równania (36) prostopadłe do osi obrotu również prowadzą do nietrywialnych warunków.

Dynamika bryły sztywnej: podsumowanie

- Ruch środka masy bryły dostajemy rozwiązując równanie

$$m\vec{r}_{\text{ŚM}}''(t) = \sum_i \vec{F}_i^{zew}(t) \tag{35}$$

gdzie m jest masą bryły, natomiast $\sum_i \vec{F}_i^{zew}$ jest sumą wszystkich sił zewnętrznych działających na bryłę.

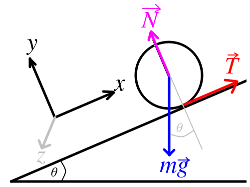
- Jeśli bryła wykonuje ruch obrotowy wokół osi nieruchomej lub przemieszczającej się równolegle osi przechodzącej przez środek masy, to prędkość kątową bryły dostajemy rozwiązując równanie

$$\vec{L}'(t) = \sum_i \vec{D}_i^{zew}(t) \tag{36}$$

gdzie $\sum_i \vec{D}_i^{zew}(t)$ jest sumarycznym momentem sił zewnętrznych względem, odpowiednio, punktu nieruchomego leżącego na osi lub względem środka masy, natomiast $\vec{L}(t)$ – momentem pędu względem tego samego punktu.

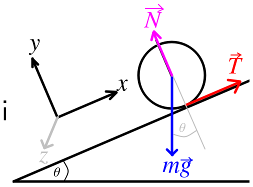
- Składowa prędkości kątowej wzdłuż osi obrotu wiąże się z momentem pędu przez $\mathcal{I}\omega_z(t) = L_z(t)$, gdzie $\mathcal{I}$ jest momentem bezwładności względem osi obrotu (założyliśmy, że oś obrotu jest równoległa do osi z).
- Należy pamiętać, że w ogólnym przypadku, składowe równania (36) prostopadłe do osi obrotu również prowadzą do nietrywialnych warunków.
- Należy też pamiętać, że nawet przy ruchu wokół osi nieruchomej równanie (35) także może prowadzić do nietrywialnych warunków.

Przykład: walec na równi



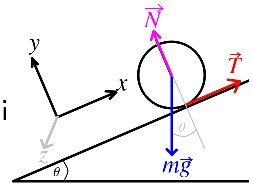
Przykład: walec na równi

- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ



Przykład: walec na równi

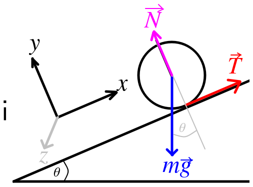
- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ



$$0 = ma_y^{\text{ŚM}}$$

Przykład: walec na równi

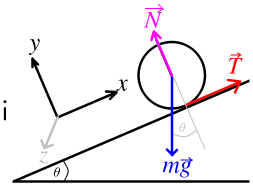
- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ



$$0 = ma_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,,$$

Przykład: walec na równi

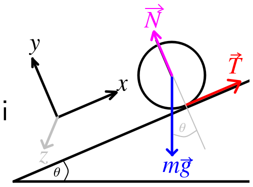
- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ



$$0 = ma_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,, \qquad ma_x^{\text{ŚM}}$$

Przykład: walec na równi

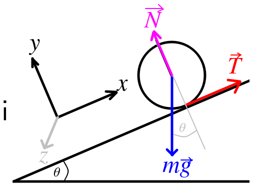
- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ



$$0 = ma_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,, \qquad ma_x^{\text{ŚM}} = -mg\sin\theta + T_x\,,$$

Przykład: walec na równi

- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ

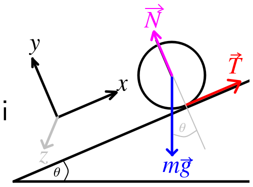


$$0 = ma_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,, \qquad ma_x^{\text{ŚM}} = -mg\sin\theta + T_x\,,$$

$$\mathcal{I}\omega_z'\vec{k}$$

Przykład: walec na równi

- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ

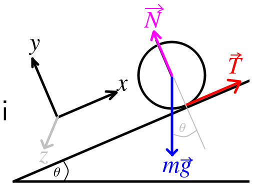


$$0 = ma_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,, \qquad ma_x^{\text{ŚM}} = -mg\sin\theta + T_x\,,$$

$$\mathcal{I}\omega_z'\vec{k} = -R\vec{j} \times \{T_x\vec{i}\}$$

Przykład: walec na równi

- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ

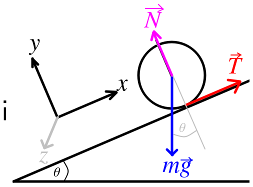


$$0 = ma_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,, \qquad ma_x^{\text{ŚM}} = -mg\sin\theta + T_x\,,$$

$$\mathcal{I}\omega_z'\vec{k} = -R\vec{j}\times\{T_x\vec{i}\} = RT_x\vec{k}\,,$$

Przykład: walec na równi

- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ



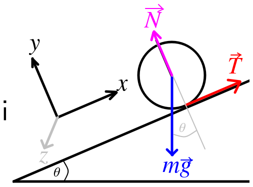
$$0 = ma_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,, \qquad ma_x^{\text{ŚM}} = -mg\sin\theta + T_x\,,$$

$$\mathcal{I}\omega_z'\vec{k} = -R\vec{j}\times\{T_x\vec{i}\} = RT_x\vec{k}\,,$$

Punkt styku ma zerową prędkość:

$$\vec{0} = \vec{v}^{\text{ŚM}} + \omega_z\vec{k}\times\{-R\vec{j}\}$$

Przykład: walec na równi



- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ

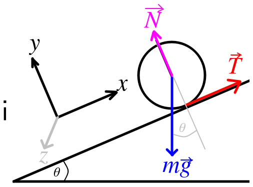
$$0 = m a_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,, \qquad m a_x^{\text{ŚM}} = -mg\sin\theta + T_x\,,$$

$$\mathcal{I}\omega_z'\vec{k} = -R\vec{j} \times \{T_x\vec{i}\} = RT_x\vec{k}\,,$$

Punkt styku ma zerową prędkość:

$$\vec{0} = \vec{v}^{\text{ŚM}} + \omega_z\vec{k} \times \{-R\vec{j}\} = \left\{v_x^{\text{ŚM}} + R\omega_z\right\}\vec{i}\,,$$

Przykład: walec na równi



- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ

$$0 = ma_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,, \qquad ma_x^{\text{ŚM}} = -mg\sin\theta + T_x\,,$$

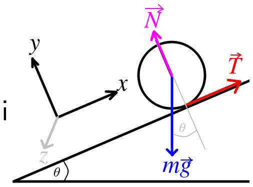
$$\mathcal{I}\omega_z'\vec{k} = -R\vec{j} \times \{T_x\vec{i}\} = RT_x\vec{k}\,,$$

Punkt styku ma zerową prędkość:

$$\vec{0} = \vec{v}^{\text{ŚM}} + \omega_z\vec{k} \times \{-R\vec{j}\} = \left\{v_x^{\text{ŚM}} + R\omega_z\right\}\vec{i}, \quad \Rightarrow$$

Przykład: walec na równi

- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ



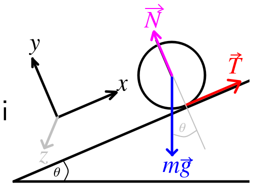
$$0 = ma_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,, \qquad ma_x^{\text{ŚM}} = -mg\sin\theta + T_x\,,$$

$$\mathcal{I}\omega_z'\vec{k} = -R\vec{j}\times\{T_x\vec{i}\} = RT_x\vec{k}\,,$$

Punkt styku ma zerową prędkość:

$$\vec{0} = \vec{v}^{\text{ŚM}} + \omega_z\vec{k}\times\{-R\vec{j}\} = \left\{v_x^{\text{ŚM}} + R\omega_z\right\}\vec{i}, \quad \Rightarrow \quad a_x^{\text{ŚM}} = -R\omega_z'$$

Przykład: walec na równi



- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ

$$0 = ma_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,, \qquad ma_x^{\text{ŚM}} = -mg\sin\theta + T_x\,,$$

$$\mathcal{I}\omega_z'\vec{k} = -R\vec{j} \times \{T_x\vec{i}\} = RT_x\vec{k}\,,$$

Punkt styku ma zerową prędkość:

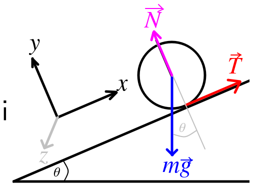
$$\vec{0} = \vec{v}^{\text{ŚM}} + \omega_z\vec{k} \times \{-R\vec{j}\} = \left\{v_x^{\text{ŚM}} + R\omega_z\right\}\vec{i}, \quad \Rightarrow \quad a_x^{\text{ŚM}} = -R\omega_z'$$

Rozwiązujemy układ równań

$$T_x = \mathcal{I}\frac{\omega_z'}{R}$$

Przykład: walec na równi

- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ



$$0 = ma_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,, \qquad ma_x^{\text{ŚM}} = -mg\sin\theta + T_x\,,$$

$$\mathcal{I}\omega_z'\vec{k} = -R\vec{j}\times\{T_x\vec{i}\} = RT_x\vec{k}\,,$$

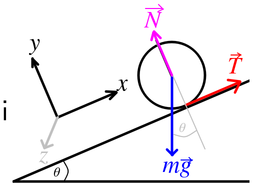
Punkt styku ma zerową prędkość:

$$\vec{0} = \vec{v}^{\text{ŚM}} + \omega_z\vec{k}\times\{-R\vec{j}\} = \left\{v_x^{\text{ŚM}} + R\omega_z\right\}\vec{i}, \quad \Rightarrow \quad a_x^{\text{ŚM}} = -R\omega_z'$$

Rozwiązujemy układ równań

$$T_x = \mathcal{I}\frac{\omega_z'}{R} = -\frac{\mathcal{I}}{R^2}a_x^{\text{ŚM}}$$

Przykład: walec na równi



- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ

$$0 = ma_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,, \qquad ma_x^{\text{ŚM}} = -mg\sin\theta + T_x\,,$$

$$\mathcal{I}\omega_z'\vec{k} = -R\vec{j} \times \{T_x\vec{i}\} = RT_x\vec{k}\,,$$

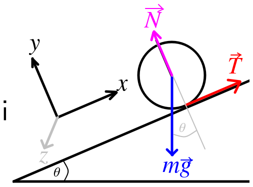
Punkt styku ma zerową prędkość:

$$\vec{0} = \vec{v}^{\text{ŚM}} + \omega_z\vec{k} \times \{-R\vec{j}\} = \left\{v_x^{\text{ŚM}} + R\omega_z\right\}\vec{i}, \quad \Rightarrow \quad a_x^{\text{ŚM}} = -R\omega_z'$$

Rozwiązujemy układ równań

$$T_x = \mathcal{I}\frac{\omega_z'}{R} = -\frac{\mathcal{I}}{R^2}a_x^{\text{ŚM}} \quad \Rightarrow$$

Przykład: walec na równi



- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ

$$0 = ma_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,, \qquad ma_x^{\text{ŚM}} = -mg\sin\theta + T_x\,,$$

$$\mathcal{I}\omega_z'\vec{k} = -R\vec{j} \times \{T_x\vec{i}\} = RT_x\vec{k}\,,$$

Punkt styku ma zerową prędkość:

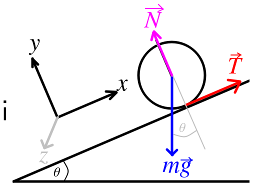
$$\vec{0} = \vec{v}^{\text{ŚM}} + \omega_z\vec{k} \times \{-R\vec{j}\} = \left\{v_x^{\text{ŚM}} + R\omega_z\right\}\vec{i}, \quad \Rightarrow \quad a_x^{\text{ŚM}} = -R\omega_z'$$

Rozwiązujemy układ równań

$$T_x = \mathcal{I}\frac{\omega_z'}{R} = -\frac{\mathcal{I}}{R^2}a_x^{\text{ŚM}} \quad \Rightarrow \quad a_x^{\text{ŚM}} = \frac{-1}{m + \frac{\mathcal{I}}{R^2}}mg\sin\theta$$

Przykład: walec na równi

- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ



$$0 = ma_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,, \qquad ma_x^{\text{ŚM}} = -mg\sin\theta + T_x\,,$$

$$\mathcal{I}\omega_z'\vec{k} = -R\vec{j}\times\{T_x\vec{i}\} = RT_x\vec{k}\,,$$

Punkt styku ma zerową prędkość:

$$\vec{0} = \vec{v}^{\text{ŚM}} + \omega_z\vec{k}\times\{-R\vec{j}\} = \left\{v_x^{\text{ŚM}} + R\omega_z\right\}\vec{i}, \quad \Rightarrow \quad a_x^{\text{ŚM}} = -R\omega_z'$$

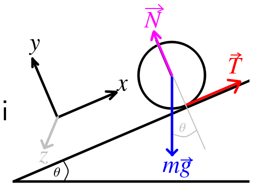
Rozwiązujemy układ równań

$$T_x = \mathcal{I}\frac{\omega_z'}{R} = -\frac{\mathcal{I}}{R^2}a_x^{\text{ŚM}} \quad \Rightarrow \quad a_x^{\text{ŚM}} = \frac{-1}{m+\frac{\mathcal{I}}{R^2}}mg\sin\theta$$

$$T_x = \frac{\mathcal{I}}{mR^2+\mathcal{I}}mg\sin\theta$$

Przykład: walec na równi

- Jednorodny walec o masie m, promieniu R i momencie bezwładności względem osi symetrii obrotowej $\mathcal{I}$ stacza się bez poślizgu z równi o kącie nachylenia θ



$$0 = ma_y^{\text{ŚM}} = N - mg\cos\theta\,, \qquad ma_x^{\text{ŚM}} = -mg\sin\theta + T_x\,,$$

$$\mathcal{I}\omega_z'\vec{k} = -R\vec{j} \times \{T_x\vec{i}\} = RT_x\vec{k}\,,$$

Punkt styku ma zerową prędkość:

$$\vec{0} = \vec{v}^{\text{ŚM}} + \omega_z\vec{k} \times \{-R\vec{j}\} = \left\{v_x^{\text{ŚM}} + R\omega_z\right\}\vec{i}, \quad \Rightarrow \quad a_x^{\text{ŚM}} = -R\omega_z'$$

Rozwiązujemy układ równań

$$T_x = \mathcal{I}\frac{\omega_z'}{R} = -\frac{\mathcal{I}}{R^2}a_x^{\text{ŚM}} \quad \Rightarrow \quad a_x^{\text{ŚM}} = \frac{-1}{m + \frac{\mathcal{I}}{R^2}}mg\sin\theta$$

$$T_x = \frac{\mathcal{I}}{mR^2 + \mathcal{I}}mg\sin\theta \leqslant \mu_s mg\cos\theta$$